Данная методическая разработка издается в соответствии с учебным планом.

Рассмотрена и одобрена кафедрой К-5 30.II.79 г., Методической комиссией факультета К и Учебно-методическим управлением.

Рецензент к.т.н. доц. В.В.Трофимов

Графические работы выполнены И.Д.Кисенко.

В настоящей методической разработке представлены образцы расчетно-графических домашних заданий по разделу "Изгиб балок и плоских рам". При работе над домашним заданием следует учитывать общие рекомендации и указания по методике выполнения расчетно-графических работ по курсу "Сопротивление материалов", изложенные в методической разработке тех же авторов "Расчетно-графические работы по сопротивлению материалов. Растяжение-сжатие." - М.: изд. МВТУ, 1980.

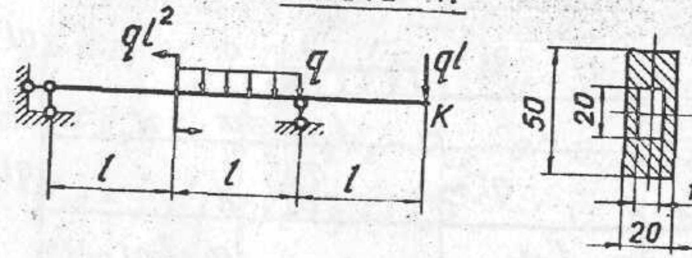
Корректор В.Т.Карасева

Заказ 881   Объем 2,I п.л.(2 уч.-изд.л.)   Тираж 2000 экз.
Бесплатно   Подписано к печати 23.06.80г. План I980 г.,№7 доп.

Ротапринт МВТУ. I07005, Москва, Б-5, 2-я Бауманская, 5.

1. Статически определимые задачи изгиба

Задача 1.1



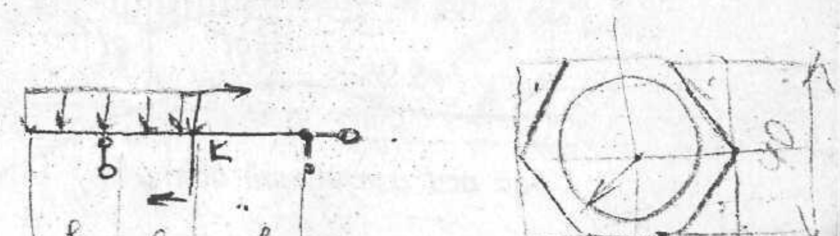
Для заданной балки постоянной жесткости требуется:

1) построить эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x;

2) определить коэффициент запаса по текучести при $q = 5$ кН/м, $l = 0,5$ м, $\sigma_{тр} = \sigma_{тс} = 280$ МПа (размеры поперечного сечения даны в мм);

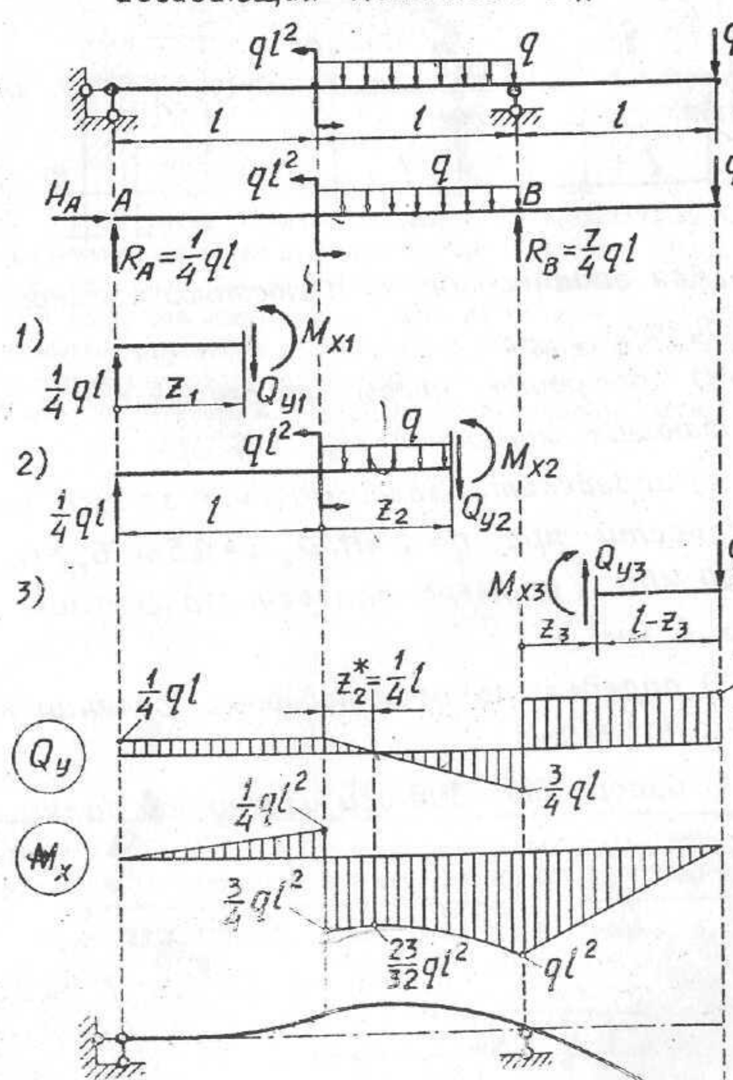
3) определить угол поворота сечения K ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа);

4) изобразить вид оси изогнутой балки.



Решение

1. Построение эпюр поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x



вид оси изогнутой балки

$M_{C(кс)} = R_A + \frac{q\ell\ell}{2}$, $R_A = \frac{q\ell}{2}$ $+q\frac{\ell^2}{2} - R_A$

Уравнения статического равновесия:

$\Sigma mom A = 0,\quad ql^2 - ql\cdot\frac{3}{2}l - ql\cdot 3l + R_B\cdot 2l = 0,\quad R_B = \frac{7}{4}ql;$

$\Sigma mom B = 0,\quad -ql\cdot l + ql^2 + ql\cdot\frac{l}{2} - R_A\cdot 2l = 0,\quad R_A = \frac{1}{4}ql.$

Поперечные силы и изгибающие моменты:

1) $0 \le z_1 \le l,\quad Q_{y1} = \frac{1}{4}ql,\quad M_{x1} = \frac{1}{4}qlz_1;$

2) $0 \le z_2 \le l,\quad \frac{1}{4}ql - qz_2 - Q_{y2} = 0,\quad Q_{y2} = \frac{1}{4}ql - qz_2;$

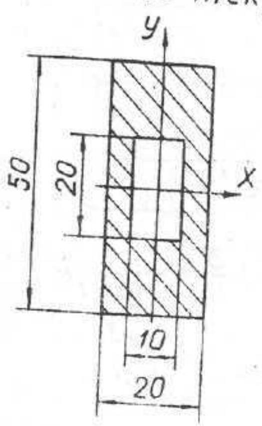
$M_{x2} = \frac{1}{4}ql(l+z_2) - ql^2 - \frac{qz_2^2}{2},$

$\frac{dM_{x2}}{dz_2} = \frac{1}{4}ql - qz_2^* = 0,\quad z_2^* = \frac{l}{4},$

$M_{x2\,экстр} = \frac{1}{4}ql\left(l+\frac{l}{4}\right) - ql^2 - \frac{q}{2}\left(\frac{l}{4}\right)^2 = -\frac{23}{32}ql^2;$

3) $0 \le z_3 \le l,\quad Q_{y3} = ql,\quad M_{x3} = -ql(l-z_3).$

2. Определение коэффициента запаса по текучести



Коэффициент запаса $n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{max}}$.

Наибольшее напряжение

$\sigma_{max} = \frac{M_{x\,max}}{W_x},\qquad W_x = \frac{J_x}{y_{max}}.$

Осевой момент сопротивления W_x вычисляем в $см^3$:

$J_x = \frac{2\cdot 5^3}{12} - \frac{1\cdot 2^3}{12} = 20{,}2\ см^4,$

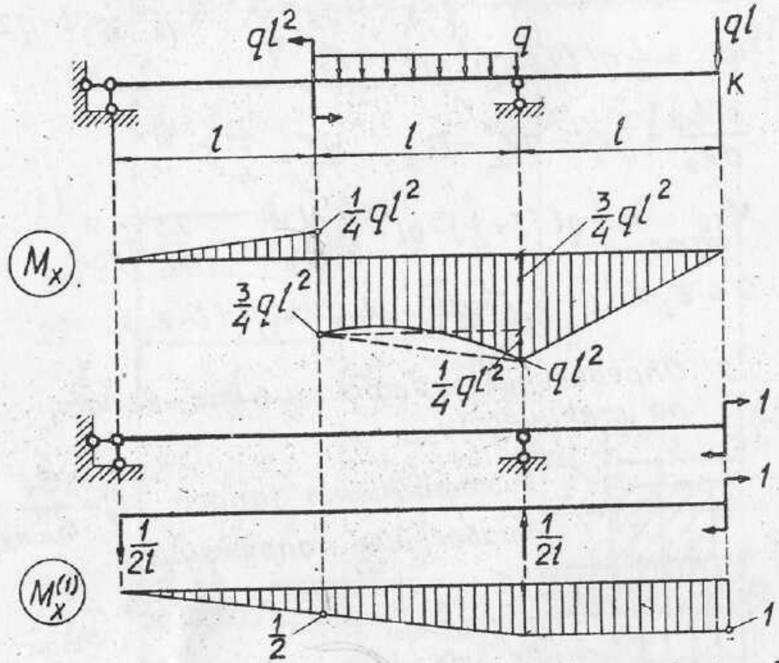
$W_x = \frac{J_x}{y_{max}} = \frac{20{,}2}{2{,}5} = 8{,}07\ см^3.$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{x\,max}}{W_x} = \frac{ql^2}{W_x} = \frac{5\cdot 10^3\cdot 0{,}5^2}{8{,}07\cdot 10^{-6}} = 154{,}9\cdot 10^6\ \text{Па},$$

$$\sigma_{max} = 154{,}9\ \text{МПа}.$$

$$n_т = \frac{\sigma_т}{\sigma_{max}} = \frac{280}{154{,}9} = 1{,}8.$$

3. Определение угла поворота сечения К

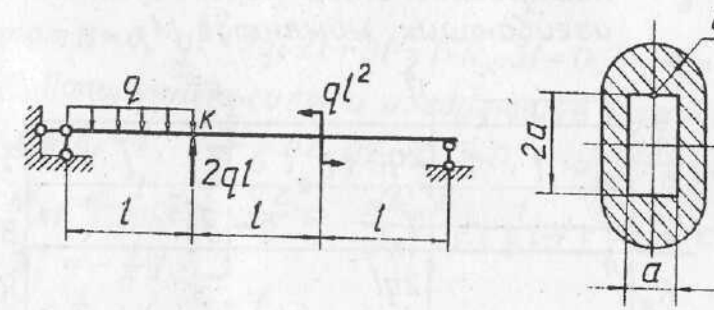


$$\theta_K = \frac{1}{EJ_x}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}ql^2\cdot l\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{4}ql^2 l\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}ql^2 l\cdot\frac{5}{6} - \right.$$

$$\left. -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}ql^2\cdot l\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{2}ql^2\cdot l\cdot 1\right) = \frac{17}{16}\frac{ql^3}{EJ_x},$$

$$\theta_K = \frac{17}{16}\frac{ql^3}{EJ_x} = \frac{17\cdot 5\cdot 10^3\cdot 0{,}5^3}{16\cdot 2\cdot 10^{11}\cdot 20{,}2\cdot 10^{-8}} = 0{,}0164\ \text{рад}.$$

Задача 1.2



Для заданной балки постоянной жесткости требуется:

1) построить эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x;

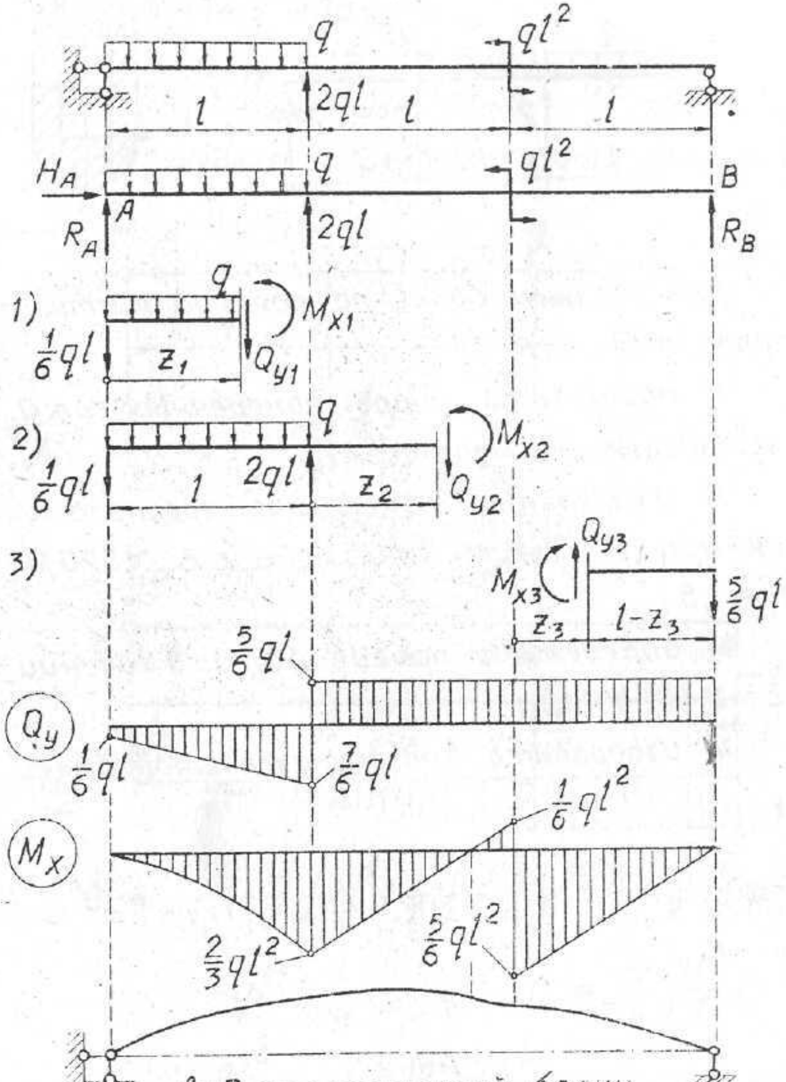
2) определить размер a поперечного сечения при $q = 8$ кН/м, $l = 0{,}5$ м, $\sigma_{тр} = \sigma_{тс} = 320$ МПа, $n_т = 1{,}5$;

3) определить прогиб балки в сечении К ($E = 2\cdot 10^5$ МПа);

4) изобразить вид оси изогнутой балки.

Решение

1. Построение эпюр поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x



вид оси изогнутой балки

Уравнения статического равновесия:

$\Sigma\, mom\, A=0,\quad -ql\cdot\frac{l}{2}+2ql\cdot l+ql^2+R_B\cdot 3l=0,\quad R_B=-\frac{5}{6}ql;$

$\Sigma\, mom\, B=0,\quad ql^2-2ql\cdot 2l+ql\cdot\frac{5}{2}l-R_A\cdot 3l=0,\quad R_A=-\frac{1}{6}ql$

Поперечные силы и изгибающие моменты

1) $0\le z_1\le l,\quad -\frac{1}{6}ql-qz_1-Q_{y1}=0,\quad Q_{y1}=-\frac{1}{6}ql-qz_1;$

$M_{x1}=-\frac{1}{6}qlz_1-\frac{qz_1^2}{2},\quad \frac{dM_{x1}}{dz_1}=-\frac{1}{6}ql-qz_1^*=0,$

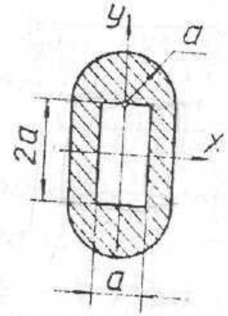
$z_1^*=-\frac{1}{6}l;$

2) $0\le z_2\le l,\quad -\frac{1}{6}ql-ql+2ql-Q_{y2}=0,\quad Q_{y2}=\frac{5}{6}ql;$

$M_{x2}=-\frac{1}{6}ql(l+z_2)-ql\left(\frac{l}{2}+z_2\right)+2qlz_2;$

3) $0\le z_3\le l,\quad Q_{y3}=\frac{5}{6}ql,\quad M_{x3}=-\frac{5}{6}ql(l-z_3).$

2. Определение размера a поперечного сечения



Условие прочности $\sigma_{max}=\frac{\sigma_T}{n_T}$.

Наибольшее напряжение

$$\sigma_{max}=\frac{M_{x\,max}}{W_x},\qquad W_x=\frac{J_x}{y_{max}}.$$

Осевой момент инерции

$$J_x=\frac{(2a)^4}{12}-\frac{a(2a)^3}{12}+2\left[\frac{\pi a^4}{8}-\left(\frac{4}{3}\frac{a}{\pi}\right)^2\frac{\pi a^2}{2}+\left(\frac{4}{3}\frac{a}{\pi}+a\right)^2\frac{\pi a^2}{2}\right]=a^4\left[\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}-\frac{16}{9\pi}+\frac{(4+3\pi)^2}{9\pi}\right],$$

$$J_x=7,26\,a^4.$$

Осевой момент сопротивления

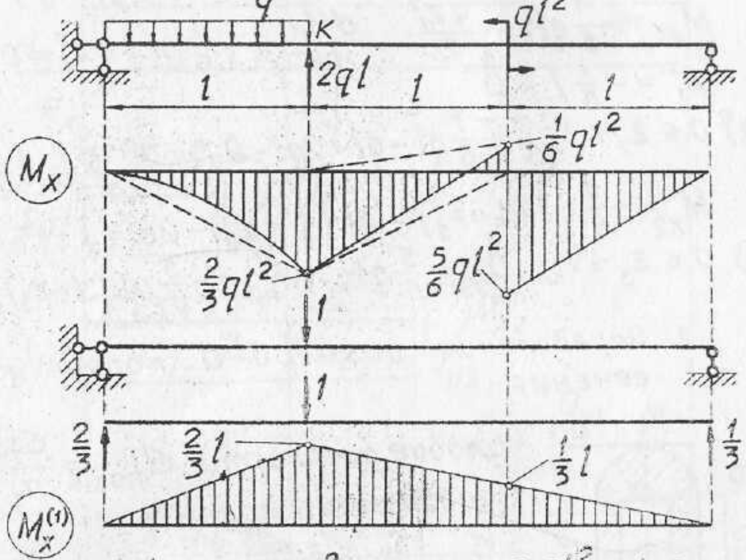
$$W_x'=\frac{J_x}{y_{max}}=\frac{7,26a^4}{2a}=3,63a^3$$

$$M_{x\,max} = \frac{5}{6} ql^2, \qquad \frac{5}{6}\,\frac{ql^2}{3,63a^3} = \frac{\sigma_T}{n_T},$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{5ql^2 n_T}{6\cdot 3,63\sigma_T}} = \sqrt[3]{\frac{5\cdot 8\cdot 10^3\cdot 0,5^2\, 1,5}{6\cdot 3,63\cdot 320\cdot 10^6}} = 1,29\cdot 10^{-2}\ м,$$

$$a = 1,3\ см.$$

3. Определение прогиба балки в сечении K



$$V_K = \frac{1}{EJ_x}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}ql^2 l\,\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}l + \frac{2}{3}\,\frac{ql^2}{8}\,l\,\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}l + \right.$$

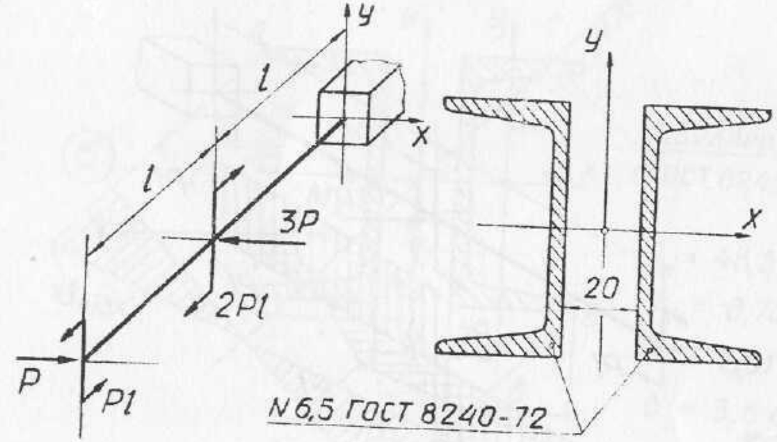
$$\left. + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}ql^2 l\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}l - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}ql^2 l\,\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3}l - \frac{1}{2}\,\frac{5}{6}ql^2 l\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{ql^4}{EJ_x}\left(-\frac{4}{27} + \frac{1}{36} + \frac{1}{27} - \frac{5}{27} - \frac{5}{27\cdot 2}\right) = -\frac{13}{36}\,\frac{ql^4}{EJ_x},$$

$$V_K = -\frac{13}{36}\cdot\frac{8\cdot 10^3\cdot 0,5^4}{2\cdot 10^5\, 10^6\, 7,26\cdot 1,3^4\, 10^{-8}} = -4,35\cdot 10^{-3}\ м.$$

Сечение K перемещается вверх на 4,35 мм.

Задача 1.3



Для заданной балки требуется:

1) построить эпюры изгибающих моментов;

2) определить положение нейтральной линии и построить эпюру нормальных напряжений в опасном сечении;

3) вычислить коэффициент запаса по текучести;

4) определить линейное перемещение свободного конца балки.

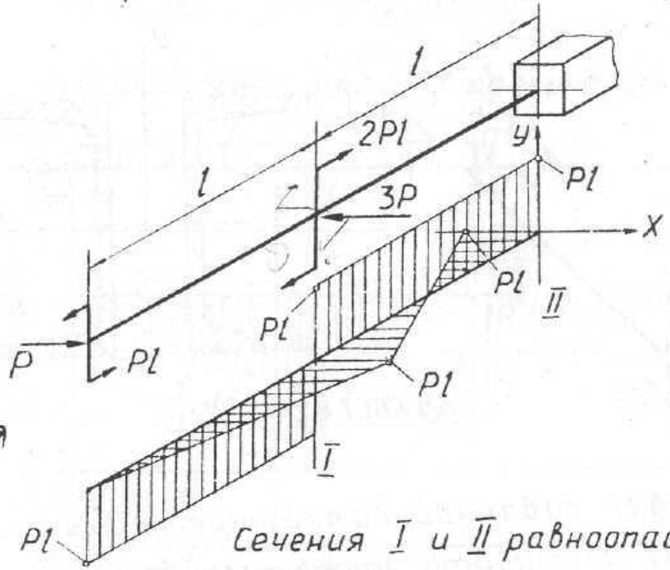
Дано: $P = 4\ кН$, $l = 0,5\ м$,

$\sigma_{тр} = \sigma_{тс} = \sigma_т = 200\ МПа$,

$E = 2\cdot 10^5\ МПа$.

Решение

1. Эпюры изгибающих моментов M_x и M_y



Сечения I и II равноопасны.

2. Определение положения нейтральной линии и построение эпюры нормальных напряжений в поперечном сечении II

Уравнение для определения напряжений

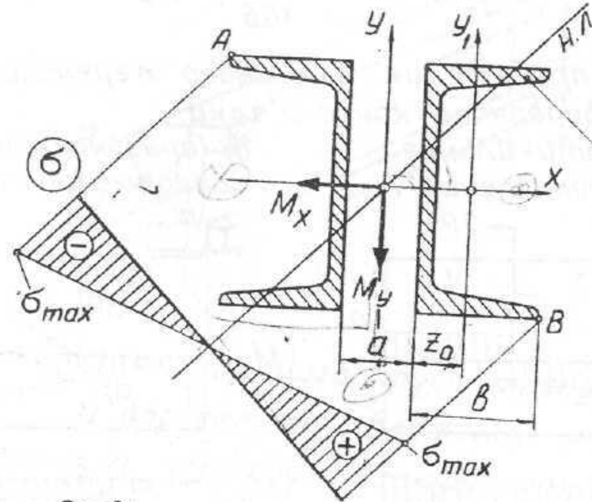
$$\sigma = \mp \frac{M_x}{J_x} y \pm \frac{M_y}{J_y} x .$$

Уравнение нейтральной линии

$$\sigma = 0 \longrightarrow \quad y = \frac{J_x}{J_y} \cdot \frac{M_y}{M_x} x ;$$

так как в сечении II $M_x = Pl$, $M_y = Pl$, то

$$y = \frac{J_x}{J_y} x .$$



швеллер N 6,5 (ГОСТ 8240-72)

$J_x = 48,6$ см^4,
$J_{y1} = 8,70$ см^4,
$F = 7,51$ см^2,
$в = 3,6$ см,
$z_0 = 1,24$ см.

Осевые моменты инерции поперечного сечения:

$$J_x = 2J_x^c = 2 \cdot 48,6 = 97,2 \text{ см}^4,$$

$$J_y = 2J_y^c = 2\left[J_{y_1} + \left(\frac{a}{2} + z_0\right)^2 F\right] = 2\left[8,70 + (1 + 1,24)^2 \cdot 7,5\right] = 92,8 \text{ см}^4.$$

Уравнение нейтральной линии

$$y = \frac{J_x}{J_y} x = \frac{97,2}{92,8} x = 1,047x.$$

Наибольшее нормальное напряжение

$$\sigma_{max} = \sigma_B = |\sigma_A| = -\frac{M_x}{J_x} y_B + \frac{M_y}{J_y} x_B ,$$

$x_B = 4,6$ см, $y_B = -3,25$ см,

$$\sigma_{max} = -\frac{4 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{97,2 \cdot 10^{-8}} (-3,25 \cdot 10^{-2}) + \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{92,8 \cdot 10^{-8}} \cdot 4,6 \cdot 10^{-2} = 166 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

$$\sigma_{max} = 166 \text{ МПа}.$$

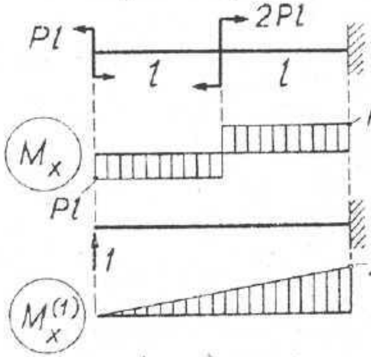
3. Вычисление коэффициента запаса по текучести

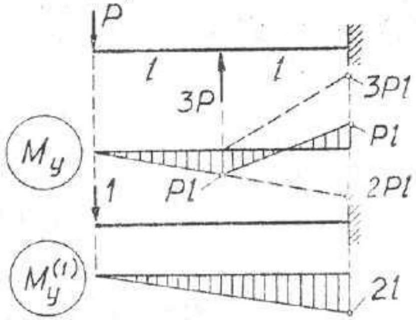
$$n_т = \frac{\sigma_т}{\sigma_{max}} = \frac{200}{166} = 1,2.$$

4. Определение линейного перемещения свободного конца балки

а) Вертикальное перемещение V

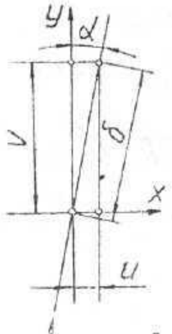
б) Горизонтальное перемещение u





а) $V = \frac{1}{EJ_x}\left(-Pl\cdot l\cdot \frac{l}{2} + Pl\cdot l\cdot \frac{3}{2}l\right) = \frac{Pl^3}{EJ_x}$ (вверх);

б) $u = \frac{1}{EJ_y}\left(\frac{1}{2}2Pl\cdot 2l\cdot \frac{4}{3}l - \frac{1}{2}3Pl\cdot l\cdot \frac{5}{3}l\right) = \frac{1}{6}\frac{Pl^3}{EJ_y}$ (вправо);



направление полного перемещения

$$tg\,\alpha = \frac{u}{V} = \frac{J_x}{6J_y} = \frac{97,2}{6\cdot 92,8} = 0,175,$$

$$\alpha = 9,9°;$$

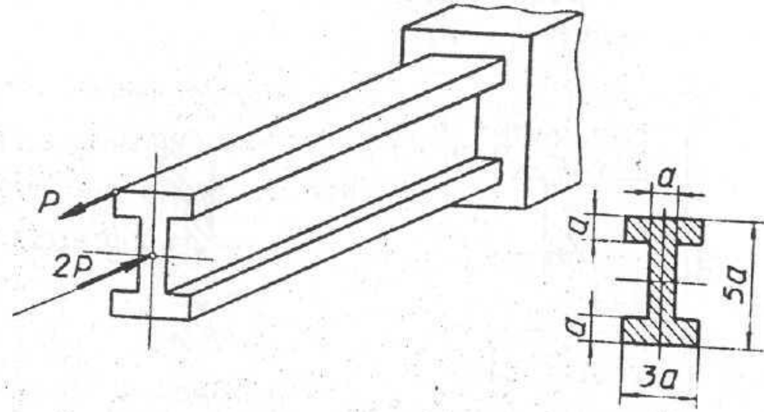
в) полное линейное перемещение

$$\delta = \sqrt{V^2+u^2} = V\sqrt{1+\left(\frac{u}{V}\right)^2} = \frac{Pl^3}{EJ_x}\sqrt{1+tg^2\alpha},$$

$$\delta = \frac{4\cdot 10^3\cdot 0,5^3}{2\cdot 10^{11}\, 97,2\cdot 10^{-8}}\sqrt{1+0,175^2} = 2,61\cdot 10^{-3}\,м,$$

$$\delta = 2,61\ мм.$$

Задача 1.4



Для заданного бруса требуется:

1) определить положение нейтральной линии и построить эпюру напряжений в поперечном сечении;

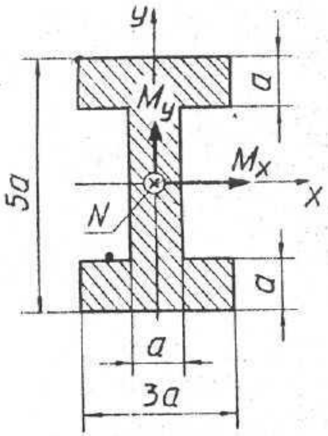
2) определить коэффициент запаса по текучести.

Дано: $P = 9$ кН, $a = 10$ мм,

$\sigma_{тр} = \sigma_{тс} = 200$ МПа.

Решение

1. Определение напряжений в поперечном сечении бруса



Внутренние силовые факторы (во всех поперечных сечениях одинаковы):

$$M_x = 2{,}5\,Pa,$$
$$M_y = 1{,}5\,Pa,$$
$$N = -P.$$

Уравнение для определения напряжений

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x}y - \frac{M_y}{J_y}x + \frac{N}{F}$$

Геометрические характеристики сечения:

$$J_x = \frac{3a(5a)^3}{12} - \frac{2a(3a)^3}{12} = \frac{107}{4}a^4,$$

$$J_y = 2\,\frac{a(3a)^3}{12} + \frac{3a\cdot a^3}{12} = \frac{19}{4}a^4,$$

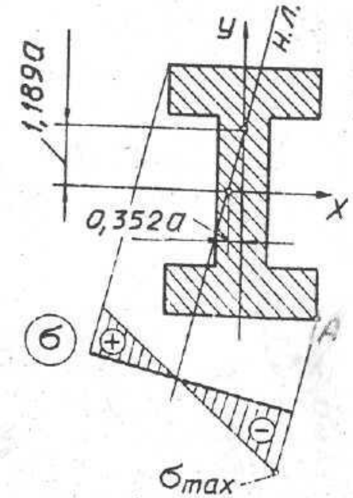
$$F = 9a^2.$$

Уравнение нейтральной линии

$$\frac{M_x}{J_x}y - \frac{M_y}{J_y}x + \frac{N}{F} = 0,$$

$$\frac{\frac{5}{2}Pa}{\frac{107}{4}a^4}y - \frac{\frac{3}{2}Pa}{\frac{19}{4}a^4}x - \frac{P}{9a^2} = 0.$$

Уравнение нейтральной линии приведем к виду



$$\frac{x}{-\frac{19}{54}a} + \frac{y}{\frac{107}{90}a} = 1$$

или

$$\frac{x}{-0{,}352a} + \frac{y}{1{,}189a} = 1.$$

Наиболее удалена от нейтральной линии точка A (1,5a; −2,5a);

Наибольшее по абсолютной величине напряжение в точке A

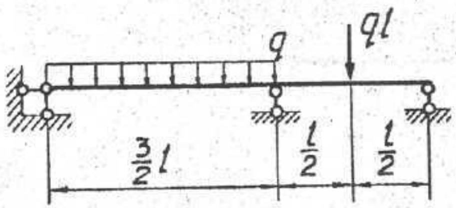
$$\sigma_{max} = |\sigma_A| = \left|\frac{\frac{5}{2}Pa}{\frac{107}{4}a^4}\cdot\left(-\frac{5}{2}a\right) - \frac{\frac{3}{2}Pa}{\frac{19}{4}a^4}\cdot\frac{3}{2}a - \frac{P}{9a^2}\right| = 0{,}818\,\frac{P}{a^2};$$

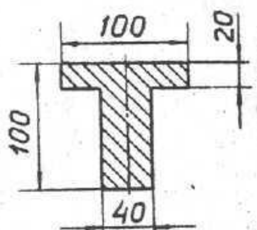
$$\sigma_{max} = 0{,}818\,\frac{P}{a^2} = 0{,}818\,\frac{9\cdot10^3}{1\cdot10^{-4}} = 73{,}6\cdot10^6\,Па = 73{,}6\,МПа.$$

2. Определение коэффициента запаса по текучести

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{max}} = \frac{200}{73{,}6} = 2{,}7.$$

Задача 2.1





Для заданной балки постоянной жесткости требуется:

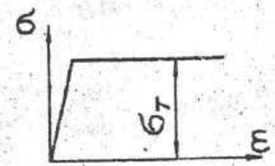
I. Выполнить расчет при упругих деформациях:

1) раскрыть статическую неопределимость

2) построить эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x, изобразить вид оси изогнутой балки;

3) определить допускаемую нагрузку $q_{доп}$, приняв $n_т = 1{,}5$, $l = 1$ м.

II. Определить коэффициент запаса по предельным нагрузкам при $q = q_{доп}$.



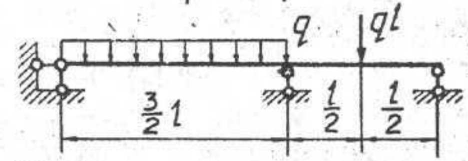
Материал балки идеально упруго-пластичный,

$б_{тр} = б_{тс} = б_т = 350$ МПа.

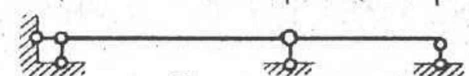
Решение

I. Расчет при упругих деформациях

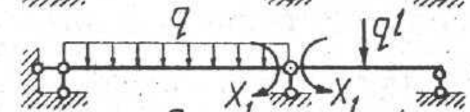
1. Раскрытие статической неопределимости



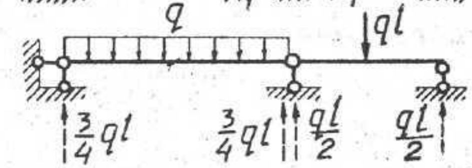
заданная система

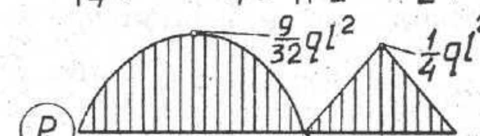


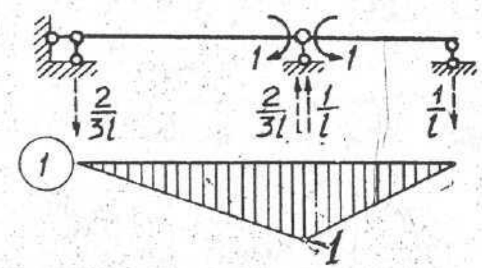
основная система



эквивалентная система







Условие эквивалентности (каноническое уравнение метода сил)

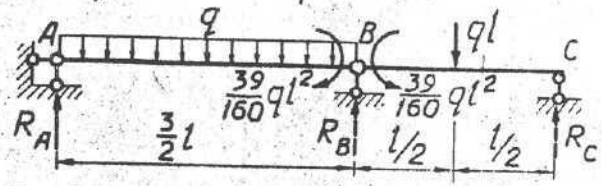
$$\delta_{11} X_1 + \delta_{1P} = 0\,;$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_x}\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{3}{2}l\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot l\cdot\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{6}\,\frac{l}{EJ_x}\,;$$

$$\delta_{1P} = -\frac{1}{EJ_x}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}l\cdot\frac{9}{32}ql^2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}l\cdot\frac{1}{4}ql^2\cdot\frac{1}{2}\right) = -\frac{13}{64}\,\frac{ql^3}{EJ_x}\,;$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{13\cdot 6}{64\cdot 5}\,ql^2 = \frac{39}{160}\,ql^2.$$

Определение реакций



Уравнения статического равновесия:

для левого пролета $\Sigma mom B = 0$,

$$-R_A \cdot \frac{3}{2}l - \frac{39}{160}ql^2 + \frac{3}{2}ql \cdot \frac{3}{4}l = 0, \qquad R_A = \frac{47}{80}$$

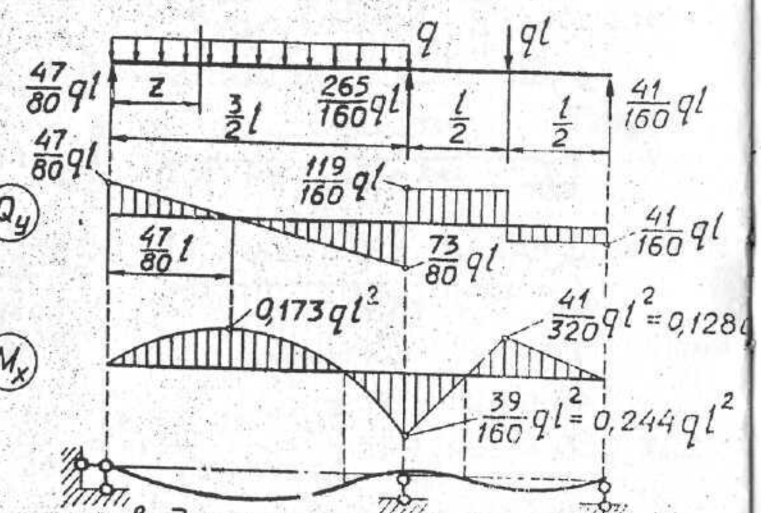
для правого пролета $\Sigma mom B = 0$,

$$R_C l + \frac{39}{160}ql^2 - ql \cdot \frac{l}{2} = 0, \qquad R_C = \frac{41}{160}$$

для всей балки $\Sigma mom A = 0$,

$$-\frac{3}{2}ql \cdot \frac{3}{4}l - ql \cdot 2l + \frac{41}{160}ql \cdot \frac{5}{2}l + R_B \cdot \frac{3}{2}l = 0, \qquad R_B = \frac{265}{160}$$

2. Построение эпюр Q_y и M_x



вид оси изогнутой балки

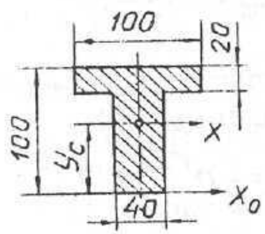
В сечении с абсциссой z $(0 \le z \le \frac{3}{2}l)$

$$Q_y = \frac{47}{80}ql - qz, \quad M_x = \frac{47}{80}qlz - \frac{qz^2}{2};$$

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y = 0 \text{ при } z^* = \frac{47}{80}l,$$

$$M_{x\,экстр} = \frac{47}{80}ql \cdot \frac{47}{80}l - \frac{q}{2}\left(\frac{47}{80}l\right)^2 = 0{,}173ql^2.$$

3. Определение допускаемой нагрузки



Ордината центра тяжести

$$y_c = \frac{S_{x_0}}{F} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 4 + 10 \cdot 2 \cdot 9}{4 \cdot 8 + 10 \cdot 2} = 5{,}92 \text{ см} =$$

$$= 5{,}92 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Определение осевого момента инерции

$$J_x = J_{x_0} - y_c^2 F = \left(\frac{10^4}{3} - 2\,\frac{3 \cdot 8^3}{3}\right) - 5{,}92^2 \cdot 52 = 487 \text{ см}^4 =$$

$$= 0{,}487 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4.$$

Условие прочности $\quad \sigma_{max} = \frac{\sigma_T}{n_T}$;

$$\sigma_{max} = \frac{M_{x\,max}}{J_x} y_{max},$$

$$\frac{M_{x\,max}}{J_x} y_{max} = \frac{\sigma_T}{n_T}, \qquad \frac{0{,}244ql^2}{J_x} y_{max} = \frac{\sigma_T}{n_T};$$

$$q_{доп} = \frac{J_x \sigma_T}{0{,}244 l^2 \cdot y_{max} \cdot n_T} = \frac{0{,}487 \cdot 10^{-5} \cdot 350 \cdot 10^6}{0{,}244 \cdot 1^2 \cdot 5{,}92 \cdot 10^{-2} \cdot 1{,}5} = 78{,}7 \cdot 10^3 \frac{Н}{м},$$

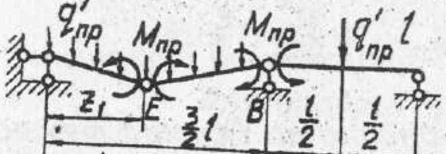
$$q_{доп} = 78{,}7 \text{ кН/м}.$$

II. Расчет по предельным нагрузкам

1. Определение предельной нагрузки

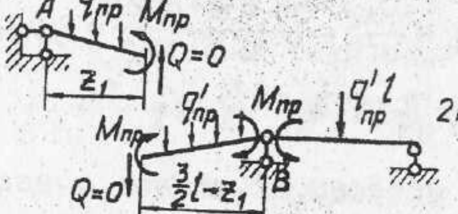
Заданная балка теряет несущую способность при возникновении двух пластических шарниров. Исследуем кинематически возможные варианты исчерпания несущей способности.

а) Пластические шарниры в сечениях B и E



$\Sigma mom\, A = 0$,

$$M_{пр} = \frac{q'_{пр} z_1^2}{2}; \qquad (1)$$



$\Sigma mom\, B = 0$ (слева от шарнира B),

$$2M_{пр} = \frac{1}{2} q'_{пр}\left(\frac{3}{2}l - z_1\right)^2. \qquad (2)$$

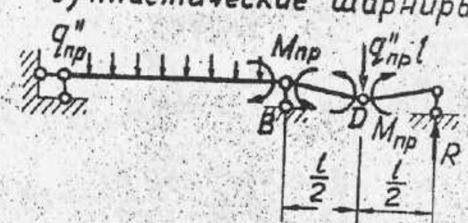
Решаем совместно (1) и (2):

$$q'_{пр} z_1^2 = \frac{1}{2} q'_{пр}\left(\frac{3}{2}l - z_1\right)^2, \qquad z_1^2 + 3l z_1 - \frac{9}{4}l^2 = 0,$$

$$z_1 = -\frac{3}{2}l \pm \sqrt{\frac{9}{4}l^2 + \frac{9}{4}l^2}, \qquad z_1 = \frac{3}{2}(\sqrt{2} - 1)l = 0{,}621\,l;$$

$$q'_{пр} = \frac{2M_{пр}}{z_1^2} = \frac{2M_{пр}}{(0{,}621 l)^2} = 5{,}19\,\frac{M_{пр}}{l^2}.$$

б) Пластические шарниры в сечениях B и D



$\Sigma mom\, D = 0$ (справа от шарнира D),

$$M_{пр} = R\frac{l}{2}; \qquad (3)$$

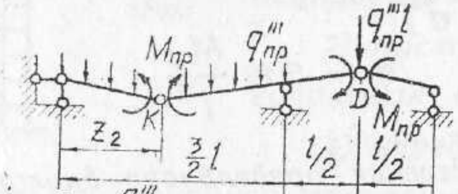
$\Sigma mom\, B = 0$ (справа от шарнира B),

$$Rl + M_{пр} = q''_{пр}\, l \cdot \frac{l}{2}. \qquad (4)$$

Решаем совместно (3) и (4):

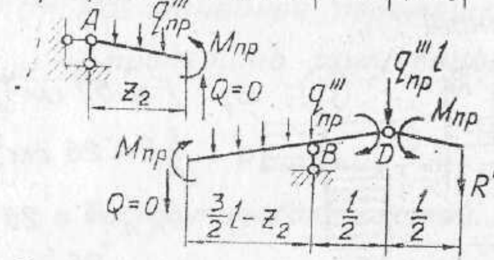
$$3M_{пр} = \frac{1}{2} q''_{пр} l^2, \qquad q''_{пр} = 6\,\frac{M_{пр}}{l^2}.$$

в) Пластические шарниры в сечениях K и D



$\Sigma mom\, A = 0$,

$$M_{пр} = \frac{q'''_{пр} z_2^2}{2}; \qquad (5)$$



$\Sigma mom\, B = 0$,

$$\frac{1}{2} q'''_{пр}\left(\frac{3}{2}l - z_2\right)^2 - R'l - \frac{q'''_{пр} l^2}{2} - M_{пр} = 0; \qquad (6)$$

$\Sigma mom\, D = 0$ (справа от шарнира D), $M_{пр} = \dfrac{R'l}{2}$. (7)

Решаем совместно (5), (6), (7):

$$\frac{1}{2} q'''_{пр}\left(\frac{3}{2}l - z_2\right)^2 = q'''_{пр} z_2^2 + \frac{q'''_{пр} z_2^2}{2} + \frac{q'''_{пр} l^2}{2},$$

$$\frac{9}{4}l^2 - 3l z_2 + z_2^2 = 3z_2^2 + l^2,$$

$$z_2^2 + \frac{3}{2} l z_2 - \frac{5}{8} l^2 = 0,$$

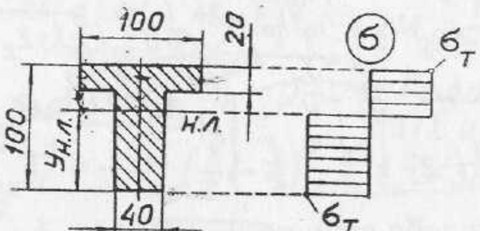
$$z_2 = -\frac{3}{4}l \pm \sqrt{\frac{9}{16}l^2 + \frac{5}{8}l^2}, \qquad z_2 = -\frac{3}{4}l + \frac{\sqrt{19}}{4}l = 0{,}340\,l;$$

$$q'''_{пр} = \frac{2M_{пр}}{z_2^2} = \frac{2M_{пр}}{(0{,}340\,l)^2} = 17{,}30\,\frac{M_{пр}}{l^2}.$$

Из трех кинематически возможных предельных состояний системы реализуется то, которому соответствует наименьшее значение предельной нагрузки (вариант а):

$$q_{пр} = 5,19\,\frac{M_{пр}}{l^2}.$$

2. Определение предельного внутреннего момента



$F = 52$ см^2,

$\frac{1}{2}F = 26$ см^2,

$y_{н.л.}\cdot 4 = 26$,

$y_{н.л.} = \frac{26}{4} = 6,5$ см.

Предельный внутренний момент

$$M_{пр} = \sigma_т\,(10\cdot 2\cdot 2,5 + 4\cdot 1,5\cdot\frac{1,5}{2} + 4\cdot 6,5\cdot\frac{6,5}{2})\cdot 10^{-6} = 350\cdot 10^{6}\cdot 139\cdot 10^{-6};$$

$$M_{пр} = 4,86\cdot 10^{4}\ Нм.$$

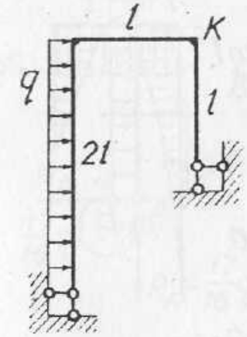
3. Определение коэффициента запаса

$$q_{пр} = 5,19\,\frac{M_{пр}}{l^2} = 5,19\,\frac{4,86\cdot 10^4}{1^2} = 2,52\cdot 10^{5}\,\frac{Н}{м},$$

$$q_{пр} = 252\,\frac{кН}{м};$$

$$n = \frac{q_{пр}}{q_{доп}} = \frac{252}{78,7} = 3,2.$$

Задача 2.2



Для заданной рамы ($EJ_x = const$) требуется:

1) раскрыть статическую неопределимость;

2) построить эпюру изгибающих моментов;

3) определить горизонтальное линейное перемещение узла K;

4) проверить полученное решение.

Решение

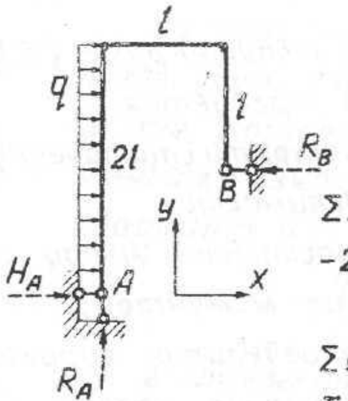
1. Раскрытие статической неопределимости

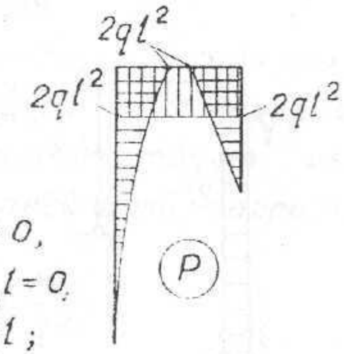
основная система

эквивалентная система

Условие эквивалентности (каноническое уравнение метода сил)

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{1P} = 0.$$





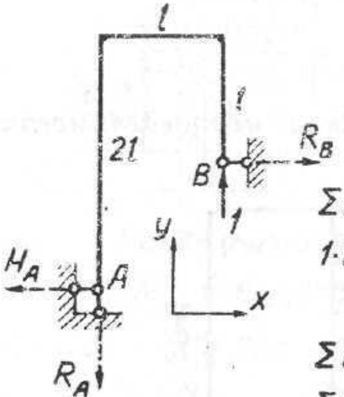
$\Sigma mom\,A = 0,$

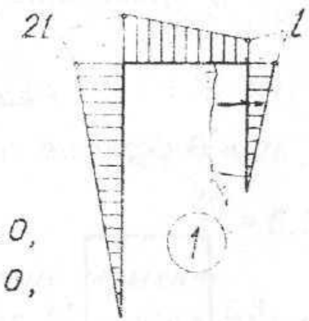
$-2ql\cdot l + R_B l = 0,$

$R_B = 2ql\,;$

$\Sigma P_y = 0,\ R_A = 0;$

$\Sigma mom\,B = 0,\ H_A = 0$





$\Sigma mom\,A = 0,$

$1\cdot l - R_B l = 0,$

$R_B = 1\,;$

$\Sigma P_y = 0,\ R_A = 1\,;$

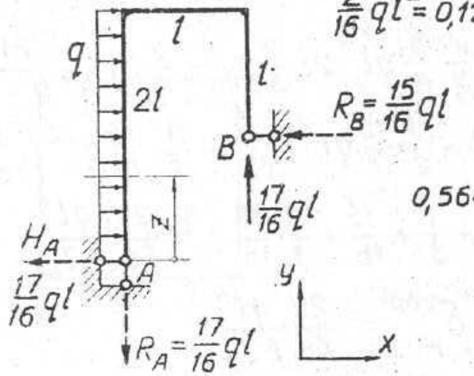
$\Sigma mom\,B = 0,\ -H_A l + 1\cdot l = 0,\ H_A = 1.$

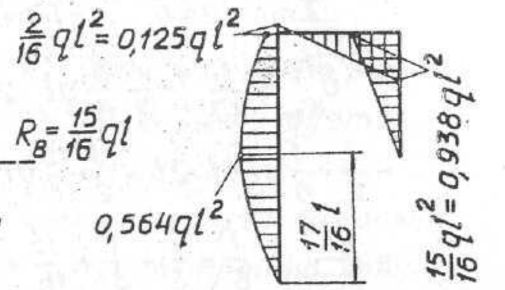
$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_x}\left(\frac{1}{2} l\cdot l\cdot \frac{2}{3} l + l\cdot l\cdot \frac{3}{2} l + \frac{1}{2} l\cdot l\cdot \frac{5}{3} l + \frac{1}{2} 2l\cdot 2l\cdot \frac{4}{3} l\right) = \frac{16}{3}\frac{l^3}{EJ_x},$$

$$\delta_{1P} = -\frac{1}{EJ_x}\left(\frac{1}{3}\cdot 2ql^2\cdot 2l\cdot \frac{3}{4} 2l + 2ql^2\cdot l\cdot \frac{3}{2} l + \frac{1}{2} 2ql^2\cdot l\cdot \frac{2}{3} l\right) = -\frac{17}{3}\frac{ql^4}{EJ_x},$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{17}{3}\cdot\frac{3}{16}\, ql = \frac{17}{16}\, ql.$$

2. Построение эпюры изгибающих моментов





$\Sigma P_y = 0, \quad R_A = \frac{17}{16}ql;$

$\Sigma mom\,A = 0, \quad -2ql\cdot l + \frac{17}{16}ql\cdot l + R_B l = 0, \quad R_B = \frac{15}{16}ql;$

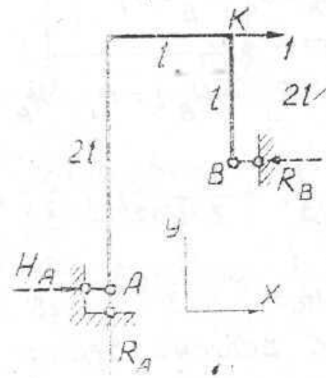
$\Sigma mom\,B = 0; \quad -H_A l + \frac{17}{16}ql\cdot l = 0, \quad H_A = \frac{17}{16}ql.$

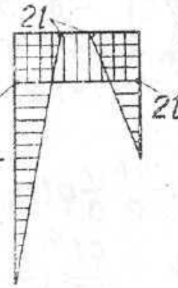
В сечении с абсциссой z $\quad M_x = \frac{17}{16}qlz - \frac{qz^2}{2}$;

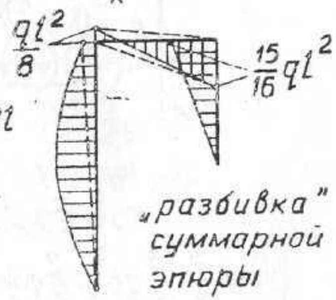
$$\frac{dM_x}{dz} = \frac{17}{16}ql - qz = 0 \quad при \quad z^* = \frac{17}{16}l;$$

$$M_{x\ экстр} = \frac{17}{16}ql\cdot\frac{17}{16}l - \frac{q}{2}\left(\frac{17}{16}l\right)^2 = \frac{q}{2}\left(\frac{17}{16}l\right)^2 = 0{,}564\,ql^2.$$

3. Определение перемещения $\delta_K^{гор}$







„разбивка" суммарной эпюры

$\Sigma P_y = 0, \quad R_A = 0;$

$\Sigma mom\, A = 0, \quad -1\cdot 2l + R_B l = 0, \quad R_B = 2;$

$\Sigma mom\, B = 0, \quad -1\cdot l + H_A l = 0, \quad H_A = 1.$

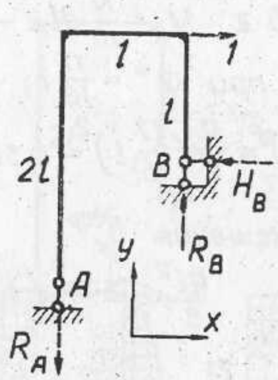
$$\delta_K^{гор} = \frac{1}{EJ_x}\Big[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}ql^2\, 2l\cdot\frac{2}{3}\cdot 2l - \frac{2}{3}\,2l\cdot\frac{q(2l)^2}{8}\,l - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}ql^2\, l\cdot 2l + \frac{1}{2}\cdot\frac{15}{16}ql^2\, l\cdot 2l + \frac{1}{2}\cdot\frac{15}{16}ql^2\, l\cdot\frac{2}{3}\cdot 2l\Big] =$$

$$= \frac{ql^4}{EJ_x}\left(-\frac{1}{6}-\frac{2}{3}-\frac{1}{8}+\frac{15}{16}+\frac{2}{3}\cdot\frac{15}{16}\right) = \frac{29}{48}\frac{ql^4}{EJ_x},$$

$$\delta_K^{гор} = \frac{29}{48}\frac{ql^4}{EJ_x}.$$

4. Проверка

Для проверки найдем $\delta_K^{гор}$ с помощью другой основной системы.



$\Sigma mom\, B = 0,$

$-1\cdot l + R_A\cdot l = 0,$

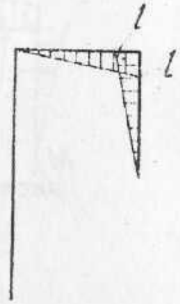
$R_A = 1;$

$\Sigma P_y = 0,$

$R_B - R_A = 0, \quad R_B = 1;$

$\Sigma mom\, A = 0,$

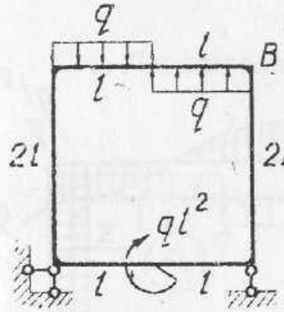
$-1\cdot 2l + R_B\cdot l + H_B\cdot l = 0, \quad H_B = 1.$



$$\delta_K^{гор} = \frac{1}{EJ_x}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}ql^2\, l\cdot\frac{1}{3}l + \frac{1}{2}\cdot\frac{15}{16}ql^2\, l\cdot\frac{2}{3}l + \frac{1}{2}\frac{15}{16}ql^2\, l\cdot\frac{2}{3}l\right) = \frac{ql^4}{EJ_x}\left(-\frac{1}{16\cdot 3}+\frac{15}{16\cdot 3}\cdot 2\right) = \frac{29}{48}\frac{ql^4}{EJ_x},$$

следовательно, задача решена верно.

Задача 2.3



Для заданной рамы ($EJ_x = const$) требуется:

1) раскрыть статическую неопределимость;

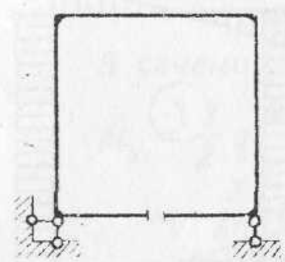
2) построить эпюру изгибающих моментов;

3) определить угол поворота узла B;

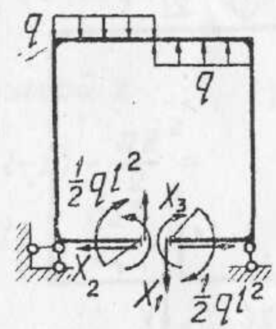
4) проверить полученное решение.

Решение

1 Раскрытие статической неопределимости



основная система



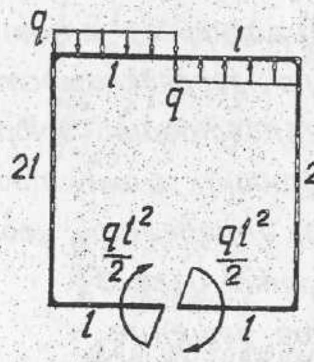
эквивалентная система

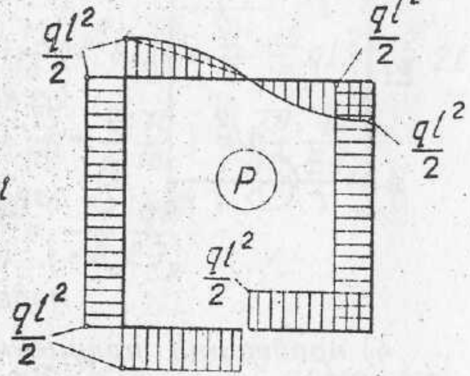
Так как нагрузка кососимметрична, то

$X_2 = 0, \quad X_3 = 0.$

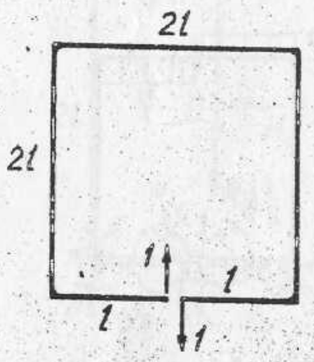
Условие эквивалентности (каноническое уравнение метода сил)

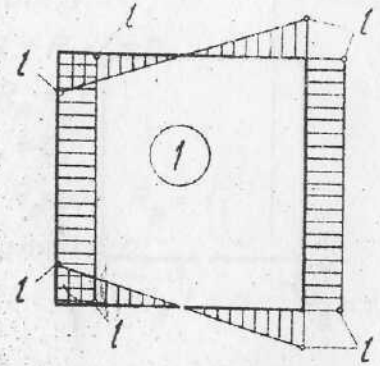
$$\delta_{11}X_1+\delta_{1P}=0.$$





Нагрузка самоуравновешена, поэтому реакции опор равны нулю.



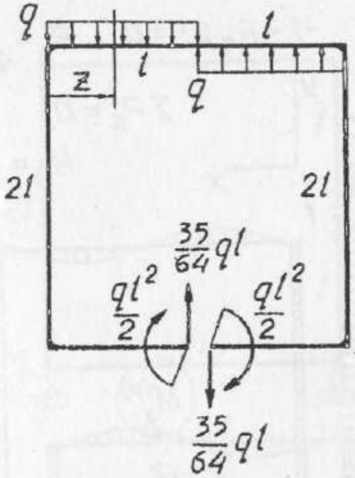


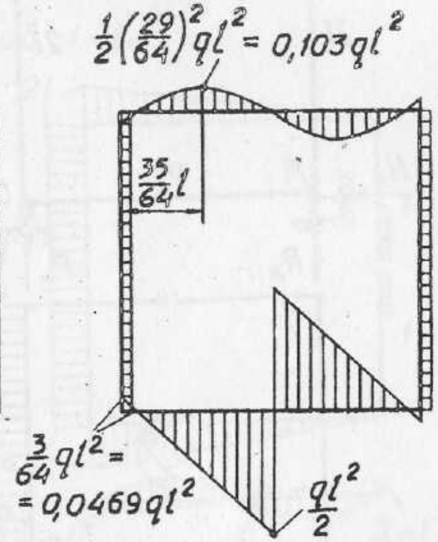
$$\delta_{11}=\frac{1}{EJ_x}\left(\frac{1}{2}l\cdot l\cdot\frac{2}{3}l\cdot 4+l\cdot 2l\cdot l\cdot 2\right)=\frac{16}{3}\frac{l^3}{EJ_x},$$

$$\delta_{1P}=\frac{1}{EJ_x}\left(-\frac{1}{2}l\cdot l\cdot\frac{1}{2}ql^2-l\cdot 2l\cdot\frac{1}{2}ql^2-\frac{1}{2}l\cdot l\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}ql^2-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}ql^2\cdot l\cdot\frac{l}{2}\right)\cdot 2=-\frac{35}{12}\frac{ql^4}{EJ_x};$$

$$X_1=-\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}}=\frac{35}{12}\cdot\frac{3}{16}ql=\frac{35}{64}ql.$$

2. Построение эпюры изгибающих моментов





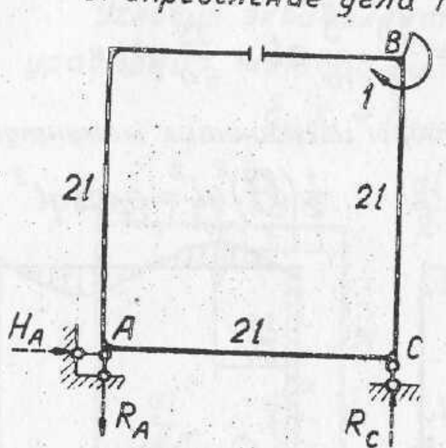
В сечении с абсциссой z

$$M_x=\frac{1}{2}ql^2-\frac{35}{64}ql(l-z)-\frac{qz^2}{2}=$$
$$=-\frac{3}{64}ql^2+\frac{35}{64}qlz-\frac{qz^2}{2};$$

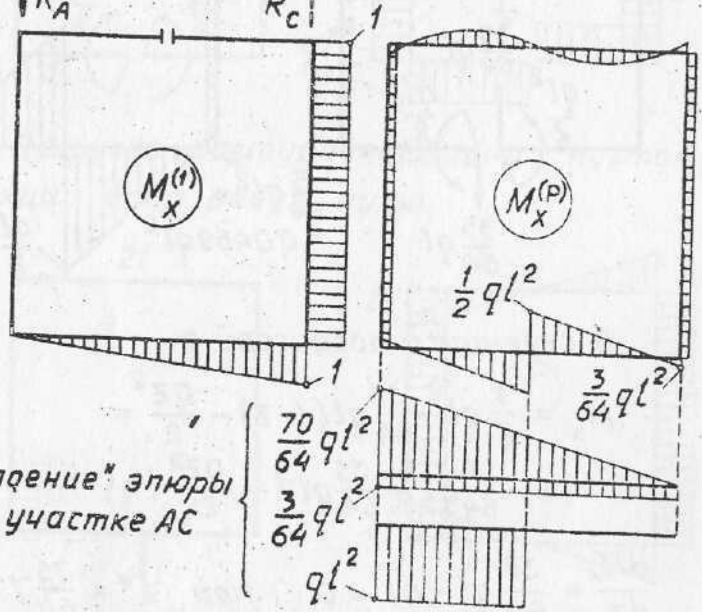
$$\frac{dM_x}{dz}=\frac{35}{64}ql-qz=0\quad \text{при}\quad z^*=\frac{35}{64}l;$$

$$M_{x\,\text{экстр}}=-\frac{3}{64}ql^2+\frac{35}{64}ql\cdot\frac{35}{64}l-\frac{1}{2}q\left(\frac{35}{64}\right)^2l^2=$$
$$=\frac{841}{2\cdot 64^2}ql^2=\frac{1}{2}\left(\frac{29}{64}\right)^2ql^2=0{,}103ql^2.$$

3. *Определение угла поворота узла В*



$$\Sigma\, mom\, A = 0,$$
$$-1 + R_C \cdot 2l = 0, \quad R_C = \frac{1}{2l};$$
$$\Sigma\, mom\, C = 0,$$
$$-1 + R_A\, 2l = 0, \quad R_A = \frac{1}{2l};$$
$$\Sigma P_x = 0,$$
$$H_A = 0.$$

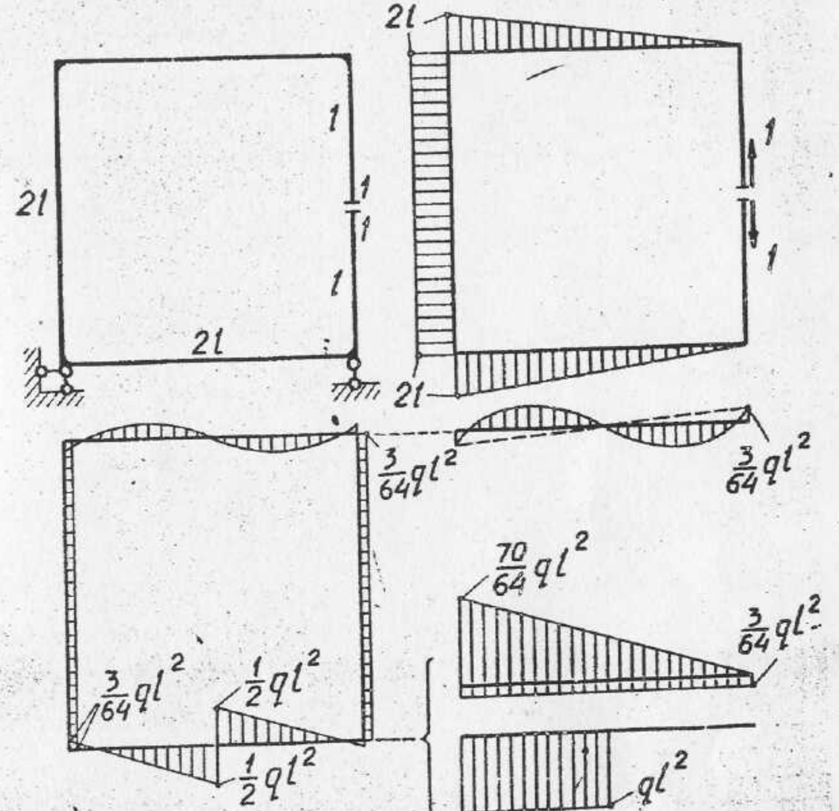


„расслоение" эпюры на участке АС

$$\theta_B = \frac{1}{EJ_x}\left(\frac{3}{64}ql^2 \cdot 2l \cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{70}{64}ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{64}ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{1}{2} + ql^2 \cdot l \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{64\cdot 3}\,\frac{ql^3}{EJ_x}, \qquad \theta_B = 0{,}0260\,\frac{ql^3}{EJ_x}.$$

4. *Проверка*

Для проверки найдем взаимное линейное перемещение сечений 1-1.



$$\delta_{1-1} = \frac{1}{EJ_x}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{64}ql^2 \cdot l \cdot \frac{l}{3} - \frac{2}{3}l \cdot \frac{ql^2}{8}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{64}ql^2 \cdot l \cdot \frac{5}{3}l + \frac{2}{3}l \cdot \frac{ql^2}{8}\cdot\frac{3}{2}l - \frac{3}{64}ql^2 \cdot 2l \cdot 2l - \frac{1}{2}\cdot\frac{70}{64}ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{4}{3}l + \frac{3}{64}ql^2 \cdot 2l \cdot l + ql^2 \cdot l \cdot \frac{3}{2}l\right) = \frac{ql^4}{EJ_x}\left(\frac{1}{2\cdot 64} - \frac{1}{24} - \frac{5}{2\cdot 64} + \frac{3}{24} - \frac{3}{16} - \frac{35}{24} + \frac{3}{32} + \frac{3}{2}\right) \equiv 0,$$

следовательно, задача решена верно.

Оглавление

Министерство высшего и среднего специального образования СССР

Московское ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени
высшее техническое училище им. Н.Э.Баумана

А.С.Газарян, Г.П.Клюева, Н.А.Сухова

Утверждена
редсоветом МВТУ

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ РАБОТЫ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

Методическая разработка

ИЗГИБ БАЛОК И ПЛОСКИХ РАМ

Под редакцией З.М.Конюшко

Москва 1980